

粒子フィルタの推定精度向上に関する研究

- レプリカ交換法を用いた MCMC 法の導入 -

○松田祥之 山田和明 (東洋大学)

概要 粒子フィルタは、状態空間に散布した多数の粒子によりシステム状態を確率分布で近似することで、システムの真の状態を推定する。しかし、粒子の平均値でシステム状態を推定する従来手法では、近似した確率分布が多峰なとき正しく推定できない。そのため本研究では、レプリカ交換法を用いた MCMC 法により状態空間を探索することで、粒子フィルタの推定精度向上を目指す。本稿では、テスト問題に提案手法を適用し、有効性を検証する。

キーワード: 粒子フィルタ, メトロポリス法, レプリカ交換法

1 はじめに

粒子フィルタ¹⁾は、システムの状態空間に多数の粒子を散布し、散布した粒子群を用いてシステムの状態を確率分布により近似することで、システムの真の状態を推定する手法である。しかし、粒子フィルタにより推定した確率分布が多峰性の場合もあり、このとき、システムの真の状態を推定することが困難になる。これまでに、我々の研究グループでは、確率分布が多峰性な場合でも最も可能性の高い状態を発見できるマルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法の導入を検討した。しかし、MCMC 法は確率分布に平坦な状態があると最適解を発見できないという課題がある。そこで本研究では、確率分布が多峰性、かつ、平坦な状態がある場合でも高い探索性能を有するレプリカ交換法を用いた MCMC 法 (以降レプリカ交換モンテカルロ法と呼ぶこととする) を粒子フィルタに導入し、確率分布からシステムの真の状態を推定する手法を提案する。

次章では、提案手法を構成する粒子フィルタとレプリカ交換モンテカルロ法について説明し、これらの統合方法について述べる。3 章では、提案手法の有効性を検証するためにテスト問題に適用し、推定結果を分析する。そして、最後にまとめと今後の課題について説明する。

2 提案手法

2.1 概要

本章では、まず、粒子フィルタについて説明する。そして、提案手法の性能を向上させるために粒子フィルタに導入した自己組織型状態空間モデルと固定ラグ平滑化法について説明する。次に、散布した粒子群からシステムの真の状態を推定するとき、平均値を用いるのではなく、レプリカ交換モンテカルロ法を用いる手法を提案する。提案手法は、レプリカ交換モンテカルロ法を用いることにより粒子フィルタによって推定したシステム状態の確率分布が、多峰性で、かつ、平坦な箇所が存在する場合でも真の状態を推定することが期待できる。

粒子フィルタは、Fig.1 のように多数の粒子をシステ

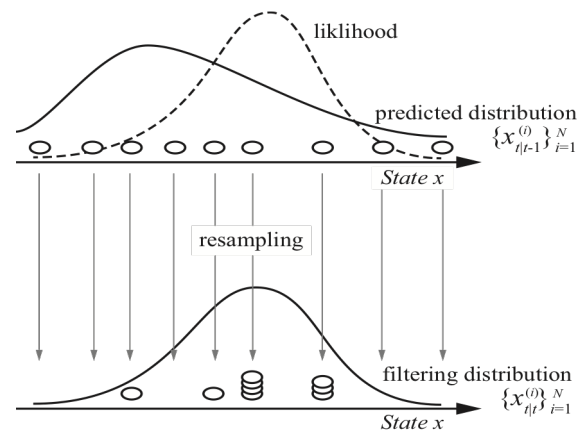


Fig. 1: An outline of particle filter.

ムモデルに基づき状態空間に散布し、システムの状態を近似する予測分布を生成する。次に、観測値に基づき、各粒子の値がシステムの状態にどれだけ近いかを尤度により表し、尤度に基づいて粒子をリサンプリングしフィルタ分布を生成する。この操作を繰り返すことでシステムの状態を推定する。粒子フィルタが導き出したフィルタ分布は、多峰性や平坦な状態が存在する場合、最も確率が高い状態の推定が困難になる。そこで、多峰性かつ平坦な状態からシステムの真の状態を推定するために、レプリカ交換モンテカルロ法を用いる手法を提案し、従来方法との推定精度を比較する。

2.2 アルゴリズム

粒子フィルタは、以下の情報が既知の場合、時刻 t におけるシステムの状態を推定することができる。

- ① 時刻 t におけるシステムの状態 x_t を表すシステムモデル ((1-1)式)
- ② システムの状態とセンサの観測値 y_t の関係を表す観測モデル ((1-2)式)
- ③ システムに発生するシステムノイズ v_t
- ④ センサに発生する観測ノイズ w_t

$$x_t = f(x_{t-1}, v_t), v_t \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (1-1)$$

$$y_t = h(x_t, w_t), w_t \sim N(0, \tau^2) \quad (1-2)$$

ただし、粒子フィルタにおいて、システムノイズとは、システムをモデル化する際に生じるズレに起因するものであり、観測ノイズとは、観測時に発生するノイズである。粒子フィルタでは、これらのパラメータを超パラメータと呼ぶ。粒子フィルタのアルゴリズムは、次のように記述できる。

- (1) 各粒子集団において初期分布を近似する粒子集団

$$\{x_{0|0}^{(i)}\}_{i=1}^N \quad (x_{0|0} \sim p_0(x))$$

ただし $p_0(x)$ は x の時刻 t における初期分布を表す。

- (2) $t = 1, \dots, T$ において、(a), (b), (c) のステップを実行する。

- (a) 尤度計算

$i (i = 1, \dots, N)$ について (i) ~ (iii) を実行する。

(i) 乱数 $v_t^{(i)} \sim q(v)$ を生成する。

(ii) $x_{t|t-1}^{(i)} = f_t(x_{t|t-1}^{(i)}, v_t^{(i)})$ を計算する。

(iii) $\beta_t^{(i)} = p(y_t | x_{t|t-1}^{(i)})$ を計算する (2) 式)

- (b) リサンプリング

粒子集団 $\{x_{t|t-1}^{(i)}\}_{i=1}^N$ から $\tilde{\beta}_t^{(i)} = \beta_t^{(i)} / \sum_{i=1}^N \beta_t^{(i)}$ の確率で $x_{t|t-1}^{(i)}$ の重複を許して抽出し、新たな粒子集団 $\{x_{t|t-1}^{(i)}\}_{i=1}^N$ を生成する。

- (c) 時刻 t の状態推定

$$\hat{x}_{t|t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{t|t-1}^{(i)}$$

なお、観測ノイズ w_t が平均ゼロ、分散 τ^2 の正規分布に従う場合、粒子 $x_{t|t-1}^{(i)}$ の尤度 $p(y_t | x_{t|t-1}^{(i)})$ は次式で求められる。

$$p(y_t | x_{t|t-1}^{(i)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} \exp \left[-\frac{(y_t - H(x_{t|t-1}^{(i)}))^2}{2\tau^2} \right] \quad (2)$$

2.3 自己組織型状態空間モデル

提案手法では、粒子フィルタによりシステムの状態と超パラメータを同時に推定するため、自己組織型状態空間モデル¹⁾を用いる。自己組織型状態空間モデルでは、まず、(4)式に示すように状態 x_t に超パラメータ λ_t を含めた状態ベクトル z_t を生成する (ただし、超パラメータ λ_t はシステムノイズ v_t の分散 σ_t^2 と観測ノイズ w_t の分散 τ_t^2 から構成されている)。そして、生成した状態ベクトル z_t に対し、粒子フィルタと同様の操作を繰り返すことで、システムノイズと観測ノイズの分散を同時に推定することができる。このとき、システムモデルと観測モデルは(5)式と記述でき、非線形関数 F と H は(6)式となる。

$$z_t = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}, \lambda_t = \begin{bmatrix} \log \sigma_t^2 \\ \log \tau^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} z_t &= F(z_{t-1}, v_t) \\ y_t &= H(z_t, w_t) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} F(z_{t-1}, w_t) &= \begin{bmatrix} f(x_{t-1}, v_t) \\ \lambda_{t-1} + \varepsilon_t \end{bmatrix} \\ H(z_t, w_t) &= h(z_t, w_t) \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、(6)式の $\lambda_t = \lambda_{t-1} + \varepsilon_t$ は超パラメータ λ_t の時間変化を表し、 $\varepsilon_t = [\zeta_t, \eta_t]'$ はそれぞれ $\zeta_t \sim N(0, \varphi^2)$, $\eta_t \sim N(0, \xi^2)$ とする。 φ と ξ は超パラメータを特徴付けるパラメータであるため超々パラメータと呼ばれる。

2.4 固定ラグ平滑化法 (Particle Smoother: PS)

提案手法では、粒子フィルタの推定精度を向上させるため固定ラグ平滑化法 (Particle Smoother: PS)¹⁾ を導入する。PS法は状態ベクトル $z_{t|t-1}^{(i)}$ を(7)式のように拡張し、拡張状態ベクトルに対して粒子フィルタと同様にリサンプリングすることで実装できる。そして、最後のリサンプリングにより得られた粒子集団

$$\{\tilde{z}_{t|t}^{(i)}\}_{i=1}^N = \left\{ \left[z_{t|t}^{(i)}, \dots, z_{t-L|t}^{(i)} \right]' \right\}$$

の部分をとり出すことで、時刻 $t-L$ の状態を推定できる。

$$\tilde{z}_{t|t-1}^{(i)} = \left[z_{t|t-1}^{(i)}, z_{t-1|t-1}^{(i)}, \dots, z_{t-L|t-1}^{(i)} \right]' \quad (7)$$

2.5 MCMC 法

MCMC法²⁾は、多変量の確率分布からサンプルを得るための一手法である。また、最大値を求めることもできる。代表的な方法としてメトロポリス法が知られている。メトロポリス法は、確率過程を用いて逐次的に探索点 X を生成する。この確率過程では現在の点 $X^{(1)}$ は直前の点 $X^{(i-1)}$ にのみ依存した確率分布に従っており、そのため、この点列 $\{X^{(i)}\}$ はマルコフ連鎖と呼ぶ。マルコフ連鎖で生成される点の集合 $\{X\}$ が対象となる確率分布 $P(X)$ 、すなわち、構成したい分布関数に収束するように、点 X から X' への遷移確率 $J(X \rightarrow X')$ を決定する必要がある。 J が確率であるための条件として、任意の点 X, X' に対して、 $0 \leq J(X \rightarrow X') \leq 1$ であり、保存則 $\int dX J = 1$ を満たさなくてはならない。これらの条件から、この確率過程の定常分布の存在が保証される。また、その定常分布が求めたい確率分布 $P(X)$ になるための必要条件は以下の2つである。

- (A) 詳細つりあいの条件： 遷移確率は関係式

$$P(X)J(X \rightarrow X') = P(X')J(X' \rightarrow X) \quad (8)$$

- (B) エルゴード条件： 任意の2つ点 X と X' の間の遷移確率がゼロではないか、あるいは有限個のゼロでない遷移確率の積で表される。

条件(A)より確率分布が不変・定常分布になることが

わかる。また、条件(B)は空間のどんな2点も有限の遷移確率で連結していることを意味している。これらの条件から任意の初期状態 $X^{(0)}$ から生成されるマルコフ連鎖が、唯一の定常分布 $P(X)$ に収束することが示される。この条件のみで遷移確率は一意には決定できないが、メトロポリス型と呼ばれる例として、次式は(8)式を満たしている。

$$J(X \rightarrow X') = \min\left(1, \frac{p(X')}{p(X)}\right) \quad (9)$$

このような遷移確率で得られたマルコフ連鎖から、十分な間隔で抜きだした状態点の集合 $\{X^{(i)}\}$ を求めたい確率分布 $P(X)$ からの独立なサンプルとみなし、確率分布 $P(X)$ に関する期待値等を計算する。以下にメトロポリス法のアルゴリズムを説明する。

- (1) 任意の初期状態 X^0 を選ぶ。
- (2) 現在の状態 $X^{(t)}$ からランダムに変化させた新しい状態 X' を作る。
- (3) 遷移コスト $P(X')/P(X^{(t)})$ を計算する。
- (4) 一様乱数 $r \in [0,1]$ を生成し、以下のように次の状態 $X^{(t+1)}$ を決める。

$$X^{(t+1)} = \begin{cases} X' & \text{if } r \leq P(X')/P(X^{(t)}) \\ X^{(t)} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

2.6 レプリカ交換モンテカルロ法

レプリカ交換モンテカルロ法³⁾は、異なる温度の値 $T_k, k = 1, 2, \dots, K$ を持つ分布 $P(x_k|T_k)$ を複数まとめた同時分布((11)式)をマルコフ連鎖モンテカルロ法でサンプリングする。このパラメータは必ずしも温度である必要はなく、対象となる確率分布を特徴付ける変数であれば良い。以下にレプリカ交換モンテカルロ法のアルゴリズムについて説明する。

- (1) 探索する確率分布の峰の高さをスケールした分布 $P(x_k|T_k)$ についてメトロポリス法等を並列に実行する。
- (2) 適当なステップ数ごとに、ランダムに選んだ $1 \leq k < K-1$ について状態 x_k と x_{k+1} を確率 $\min(1, W)$ で交換する。ここで、 W は(12)式である。

この操作により多峰性かつ平坦な状態が存在する確率分布においても最も確率の高い状態を探索することができる。

$$P(x_1, x_2, \dots, x_k) = \prod_{k=1}^K P(x_k|T_k) \quad (11)$$

$$W = \frac{P(x_{k+1}|T_k)P(x_k|T_{k+1})}{P(x_k|T_k)P(x_{k+1}|T_{k+1})} \quad (12)$$

3 実験

■ 実験設定

本実験では、粒子フィルタにレプリカ交換モンテカルロ法を適用し従来手法との比較検証を行う。そのた

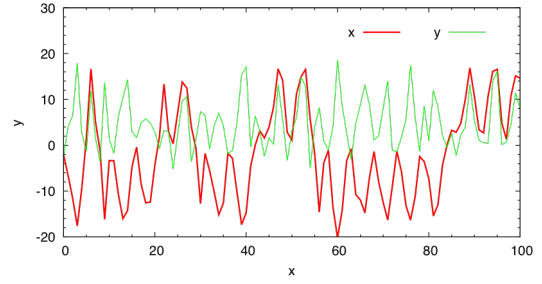


Fig.2: A test problem

め本実験では、非線形状態の推定問題としてよく用いられる(13)式⁴⁾を用いる。

$$\begin{cases} x_t = \frac{1}{2}x_{t-1} + \frac{25x_{t-1}}{1+x_{t-1}^2} + 8 \cos(1.2t) + v_t \\ y_t = \frac{x_t^2}{20} + w_t \end{cases} \quad (13)$$

$x_0 \sim N(0,5.0), v_t \sim N(0,1.7), w_t \sim N(0,8.0)$

この推定問題におけるシステムの状態 x_t と観測値 y_t との関係の一例をFig. 2 に示す。グラフの横軸は時間を表し、赤と緑の線はそれぞれシステムの状態 x_t と観測値 y_t を表す。なお、提案手法では状態 x_t を入力とし、観測値 y_t を推測する。本実験では、レプリカ交換モンテカルロ法の有効性を検証するため、システムの状態を推定する際、以下の手法を比較する。

- (1) 平均値
- (2) MCMC 法
- (3) レプリカ交換モンテカルロ法
- (4) ダウンヒルシンプレックスアルゴリズム⁵⁾

■ 実験結果

実験結果を Fig.3~6 に示す。グラフ中の sys は実際のシステムの状態を表し、ave は粒子群の平均値である。一方、pf は粒子フィルタ、ps は粒子スムーザ、mc は MCMC 法、pt はレプリカ交換モンテカルロ法、dsa はダウンヒルシンプレックスアルゴリズムによりシステムの状態を推定した結果を表している。なお、グラフの横軸は、システムの状態を表している。

Fig.3 の単峰性の確率分布では、従来手法と提案手法のどちらもシステムの状態が推定できていることがわかる。Fig.4 の多峰性の確率分布では、平均値 ave はシステム状態からズレた状態を推定している。しかし、MCMC とレプリカ交換モンテカルロ法はシステムの状態を正しく推定できていることがわかる。Fig.5 のように確率分布に平坦な箇所がある場合、MCMC 法は局所解に陥っている。一方、レプリカ交換モンテカルロ法は正しく推定できていることがわかる。このことから、レプリカ交換モンテカルロ法は、粒子フィルタにより推定された確率分布が多峰性、かつ、平坦な場合でも、確率分布において最も可能性が高い状態を推定できていることがわかる。しかし、レプリカ交換モンテカルロ法は、確率分布の峰を推定しているが、そも

そも確率分布の峰が実際のシステムの状態から乖離している場合もあり，例えば，Fig.6 のように平均値 aveの方が実際のシステムの状態に近くなっていることがある．そのため，確率分布の形状がどのようなとき，システムの状態と，レプリカ交換モンテカルロ法により推定した状態とが一致，あるいは，乖離するのかわ別する必要がある．

3 おわりに

本研究では，粒子フィルタにおいて，システムの状態を推定する際に，従来の粒子群の平均値を用いるのではなく，レプリカ交換モンテカルロ法を用いて推定する手法を提案した．提案手法で用いたレプリカ交換モンテカルロ法は，多数の粒子を用いて最適解を探索する一手法であり，従来の最適化手法が苦手とする多峰性かつ平坦な箇所が存在する確率分布においても局所解に陥らず探索できると言われている．

提案手法は，粒子群により近似した確率分布に対し，レプリカ交換モンテカルロ法を用いることで，推定した確率分布において，最も可能性が高い状態を推定することができた．しかし，粒子群で近似した確率分布の峰がシステムの真の状態から乖離することがあり，平均を用いた方が良い場合もあった．以上の結果から，どのようなとき粒子群の平均値，あるいは，レプリカ交換モンテカルロ法を用いるのが良いか判断基準を検討することが今後の課題である．

謝辞

本研究は，東洋大学井上円了記念研究助成を受けたものです．

参考文献

- 1) 北川源四郎, 樋口知之: 知識発見と自己組織型の統計モデル, bit 別冊「発見科学とデータマイニング」, 159/168, (2000)
- 2) 伊藤幸人: マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺, 岩波書店, (2008)
- 3) 永田賢二, 北園淳, 中島伸一, 永福智史, 田村了以, 岡田真人: 交換モンテカルロ法に夜変数選択問題における解の効率的な探索, 1/2, (2014)
- 4) 山田和明: アンサンブル学習を用いた粒子フィルタの提案, 第 29 回人工知能学会全国大会, 2D5-4, (2015)
- 5) 河内基樹: 木村元, USB カメラを利用した船殻ブロック工事進捗状況の自動認識, 日本船舶海洋工学講演会論文集, Vol.14, 453/456, (2012)

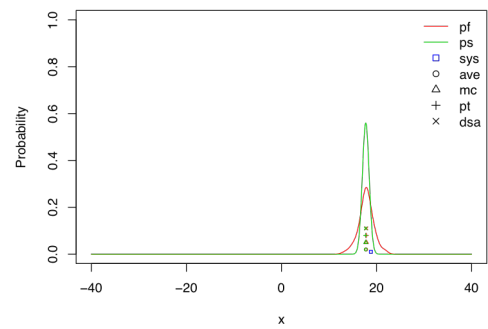


Fig. 3: A unimodal probability distribution

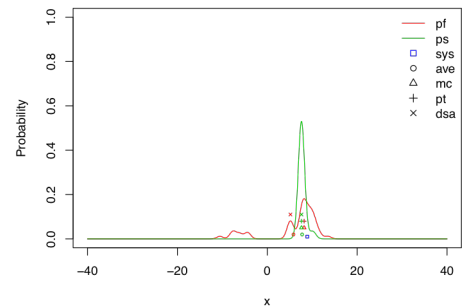


Fig. 4: A multimodal probability distribution

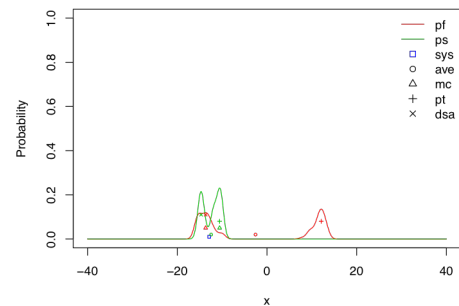


Fig. 5: A multimodal and flat probability distribution

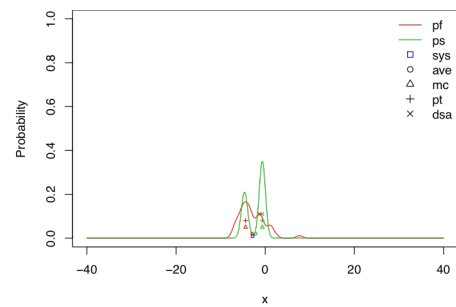


Fig. 6: The difference between a system state and esti-