人工市場シミュレーションによる最適投資戦略における復元性の影響分析

○大山遼　松井啓之（京都大学）

An Analysis of Resilience in Optimal Execution Strategy with Artificial Market Approach

∗R. Ohyama and H. Matsui (Kyoto University)

Abstract– This paper focuses on resilience, which is not well discussed in the two prior studies, Bertsimas and Lo (BL) and Obizhaeva and Wang (OW). Those studies deals with optimal execution strategy taking market impact into account. We offer and validate models of resilience, which are based on trader agents' behavior on U-Mart system. Finally, we reexamine BL-type and OW-type strategy using the resilience models and clarify the relationship between resilience and optimal execution strategy.

Key Words: Optimal execution, Resilience, U-Mart, Multi-Agent-Simulation

1 背景

金融市場の参加者である投資家にとって、目的を定め、その目的を達成するための最適な戦略を策定し、そしてその戦略に基づいて投資を実行するのは極めて合理的な行動である。しかし、金融市場には不確実性が存在するため、当初の目的が必ずしも達成されるとは限らないのみならず、策定した戦略が必ずしも奏功するとも限らない。そうした実務的な難題である最適投資戦略は、学術的にも関心が高く、Markowitz[1] のポートフォリオ選択を始め、数多くの研究を生み出してきた。近年は特に Perold[2] によって提唱された、インプリメンテーション・ショートフォールという概念が重要な意味を持っている。彼は理論上の投資と実際の投資のパフォーマンスに大きな乖離が生じうることを指摘している。この現象はとりわけ投資資金が大きい機関投資家において顕著であり、そのことは Chen et al.[3] や Yan[4] によってファンドの規模とパフォーマンスに逆相関の関係があるという形で実証されている。インプリメンテーション・ショートフォールの中でも大口投資家にとって重要なのが、マーケット・インパクトと呼ばれる、自身の投資行動が資産価格を変動させてしまう現象である。Bertsimas and Lo[5](以下、BL) はマーケット・インパクトを考慮した場合の執行コストに着目し、その期待値を最小化することを最適投資戦略と定義し、ダイナミック・プログラミングの手法によって最適解を求めている。Obizhaeva and Wang[6](以下、OW) は BL の枠組みを指値板市場に適用することにより、より現実的な想定の元での最適投資戦略を導出している。

こうした進展の一方で、金融市場は複雑な要因が絡み合っており、いくつかの要素については仮定を置かざるをえない。例えば、本研究で焦点を当てる復元性という要素は、概念こそ理解されているものの、その原理についてはそれほど明らかになっていない。OW においては、復元性は指数関数に従うとされているが、そこには実証的裏付けはなされておらず、従って与えられるパラメータも意味するところがそれほど明らかではない。本研究では人工市場 U-Mart を用いて復元性をエージェントのモデルに置き換え、市場の状況によって異なる復元性が働くというより現実的な市場を構築する。その市場環境の元でシミュレーションを行い、復元性が最適投資戦略に与える影響を考察したうえで、OW における仮定の妥当性について考察する。

2 リスク中立的な大口投資家の最適投資戦略の紹介

この章では、リスク中立的な大口投資家の最適投資戦略について論じている２つのモデルを紹介する。その次に、２モデルにおける最適投資戦略の違いを具体的な数値例を用いて議論し、差異が生じる原因である復元性との関係性を見る。

2.1 Bertsimas and Lo (BL) モデル

BL は、投資期間 T において、数量 X_0 だけ購入するリスク中立的投資家が、執行コストを最小化するための投資戦略を最適投資戦略と定義している。T は t=1,2,...,T に分割され、X_0 を期間内で x_t に分割することで執行コストの最小化を試みる。その際の市場に関する仮定として、資産価格 P_t が以下のように推移するとしている。

$$P_t = P_{t-1} + \theta x_t + \epsilon_t, \qquad \theta > 0, \quad \mathrm{E}[\epsilon_t \| x_t, P_{t-1}] = 0 \tag{1}$$

すなわち、何も投資がなければ資産価格は算術ランダムウォークに従い、そこに投資量に比例するマーケット・インパクトが加わる形で資産価格が推移すると仮定されている。BL はこの問題を以下のように有限期間の動学的最適化問題として定式化している。

$$\min_{x_t} \mathrm{E}[P_t x_t] \tag{2}$$

$$\mathrm{s.t.} \sum_{t=1}^{T} x_t = X_0$$

また、最適解はダイナミック・プログラミングの手法を用いて次のようになる。

$$x_t^* = \frac{X_0}{T} \tag{3}$$

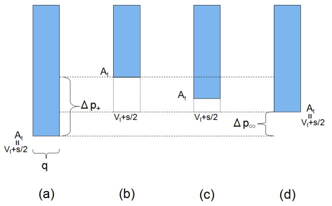


Fig. 1: 一時的インパクトと恒久的インパクトの違い

2.2 Obizhaeva and Wang (OW) モデル

OW も BL と同様に、リスク中立的な投資家の最適投資戦略を考察しているが、OW は指値板上での取引としてモデル化している。そのため、市場に関する仮定は BL よりも幾分多くなっている。

まず、指値板の状態を表す変数として、厚み q とスプレッド s が導入されている。厚みとは単位価格当たりの指値注文数量と定義され、OW では q は一定と仮定されている。スプレッドとは、最良買い気配値と最良売り気配値の乖離幅のことである。また、最良買い気配値と最良売り気配値の平均値を中値と呼ぶ。

次に、OW では、マーケット・インパクトを一時的インパクトと恒久的インパクトの２つに分けている。一時的インパクトとは一時的な需給バランスの崩れにより生じ、時間が経つにつれてその影響が徐々に薄れていくものである。一方、恒久的インパクトとは、投資によってファンダメンタル価格が変化し、そのため永久に資産価格に反映され続けるインパクトのことである。BL ではマーケット・インパクトは暗黙のうちに恒久的インパクトと仮定されている。OW ではこの２つのインパクトの違いを、中値 V_t、アスク価格 A_t、スプレッド s を用いて表現している。ここで、投資前において中値はファンダメンタル価格 F_t に等しいとする。図 1 では、投資実行前において、$V_t + \frac{s}{2}$ すなわちファンダメンタル価格にスプレッドの半分を加えた価格と A_t は一致している (a)。大きな買い注文が行われると Δp_+ だけ一時的インパクトが生じ、それによってファンダメンタル価格とアスク価格がかい離する (b)。その後、一時的インパクトの効果が薄れるに従い、２つの価格差が徐々に縮小していく (c)。十分長い期間後には恒久的インパクト Δp_∞ だけが残り、２つの価格差は消滅する (d)。また、このモデルから、投資量 x_t における一時的インパクトは $q\Delta p_+ = x_t$ より、$\Delta p_+ = \frac{x_t}{q}$ と計算される。恒久的インパクトを $\Delta p_\infty = \theta x_t$ とすると、これらより、今、時刻 0 で投資量 x_0 の投資が行われたとする。投資直後にはアスク価格は $A_{0+} = V_{0+} + \frac{s}{2} + \frac{x_0}{q}$ と計算され、一方で最終的には $A_\infty = V_\infty + \frac{s}{2} + \theta x_0$ となる。OW ではこの２つの価格差は指数関数的に縮小していくと仮定され、そのパラメータを ρ とし、これを復元性と表現している。従って時刻 t でのアスク価格は

$$A_t = V_t + \frac{s}{2} + x_0 \kappa e^{-\rho t}, \quad \kappa = \frac{1}{q} - \theta \tag{4}$$

と表現される。

次に最適投資戦略に必要な準備をする。まず、投資量 x_t にかかる購入費用であるが、アスク価格を A_t とすると、上述のとおり、投資によって価格は $A_t + \frac{x_t}{q}$ まで上昇する。よって総購入費用 $c_t(x_t)$ は

$$\begin{aligned} c_t(x_t) &= \int_0^{x_t} (A_t + \frac{x}{q}) dx \\ &= (A_t + \frac{x_t}{2q}) x_t \end{aligned} \tag{5}$$

となる。次に、時刻 t までに、投資を n 回に分割したとし、これを n(t) と表す。すると、中値 V_t とファンダメンタル価格 F_t の関係は次のようになる。

$$V_t = F_t + \theta(X_0 - X_t) = F_t + \theta \sum_{i=0}^{n(t)} x_{t_i} \tag{6}$$

ここで、$X_0 - X_t$ は時刻 t までの総購入量である。また、(4) より、この時のアスク価格は

$$A_t = V_t + \frac{s}{2} + \sum_{i=0}^{n(t)} x_{t_i} \kappa e^{-\rho(t - t_i)} \tag{7}$$

となる。

今、投資期間 T を均等に分割し、投資タイミングを $t_n = n\tau, n = 0, 1, ..., N$ とする。すると、総執行コスト J_0 の最小化としての最適化問題は以下のようになる。

$$J_0 = \min_{x_0, \ldots, x_N} \mathrm{E}_0 \Big[\sum_{n=0}^{N} [A_{t_n} + \frac{x_n}{2q}] x_n \Big] \tag{8}$$

$$s.t. \quad A_{t_n} = F_{t_n} + \theta(X_0 - X_{t_n}) + \frac{s}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} x_i \kappa e^{-\rho\tau(n-i)} \tag{9}$$

(8) 式の最適解はダイナミック・プログラミングの手法により次のように求められる。

$$\begin{aligned} x_n^* = -\frac{1}{2}\delta_{n+1}[D_{t_n}(1 - \beta_{n+1}e^{-\rho\tau} + 2\kappa\gamma_{n+1}e^{-2\rho\tau}) \\ -X_{t_n}(\theta + 2\alpha_{n+1} - \beta_{n+1}\kappa e^{-\rho\tau})] \quad (10) \\ \text{where} \quad D_{t_n} = A_{t_n} - V_{t_n} - s/2 \quad (11) \end{aligned}$$

ここで、各係数は以下のように反復的に求められる。

$$\alpha_n = \alpha_{n+1} - \frac{1}{4}\delta_{n+1}(\theta + 2\alpha_{n+1} - \beta_{n+1}\kappa e^{-\rho\tau})^2 \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \beta_n = \beta_{n+1}e^{-\rho\tau} + \frac{1}{2}\delta_{n+1}(1 - \beta_{n+1}e^{-\rho\tau} + 2\kappa\gamma_{n+1}e^{-2\rho\tau}) \\ (\theta + 2\alpha_{n+1} - \beta_{n+1}\kappa e^{-\rho\tau}) \end{aligned} \tag{13}$$

$$\gamma_n = \gamma_{n+1}e^{-2\rho\tau} - \frac{1}{4}\delta_{n+1}(1 - \beta_{n+1}e^{-\rho\tau} + 2\gamma_{n+1}\kappa e^{-2\rho\tau})^2 \tag{14}$$

$$\delta_{n+1} = [\frac{1}{2q} + \alpha_{n+1} - \beta_{n+1}e^{-\rho\tau} + 2\gamma_{n+1}\kappa^2 e^{-\rho\tau}]^{-1} \tag{15}$$

$$\text{with} \quad \alpha_N = \frac{1}{2q} - \theta, \ \beta_N = 1, \ \text{and} \gamma_N = 0 \tag{16}$$

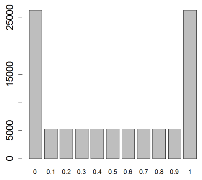


Fig. 2: N=10

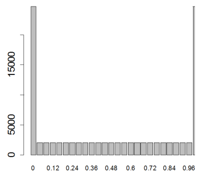


Fig. 3: N=25

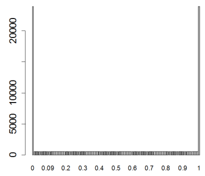


Fig. 4: N=100

2.3 数値例による２つの戦略の比較

BL モデルの最適投資戦略は均等に投資することであるのが (3) 式から明らかであるが、OW モデルのそれは式の形が複雑であるため、直観的にはわからない。そこで OW にある具体的数を当てはめて具体化したのが Fig. 2〜4 である。Fig. 2〜4 では、$X_0 = 100,000$、$q = 5000$、$\theta = 1/(2q)$、$T = 1$ となっている。また、N は投資分割数を表している。各図から解かるように、最適投資戦略は投資期間の最初と最後に大きく投資し、残りの投資量を均等に分割する戦略となっている。ここで、$\rho = 2.231$ とされているが、OW では特に根拠らしきものは明示されていない。これらのパラメータの時、最初と最後にはそれぞれ約 4 分の 1 ずつを投資するのが最適となる。

ρ の具体的な数字の与え方は明らかではないが、OW は BL では暗黙のうちに ρ が無限大であると仮定されていることを指摘している。このことは、一時的インパクトの影響が即座に消滅し、次の時点では恒久的インパクトの影響のみが残っていることを意味する。実際、Fig. 2〜4 の数値例において、$\rho = 10,000$ に変更し、その他のパラメータをそのままにすると、次の Fig. 5〜7 のような結果が得られ、BL モデルの均等投資が最適戦略となっていることがわかる。

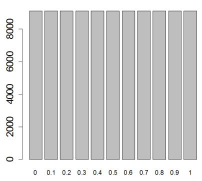


Fig. 5: N=10

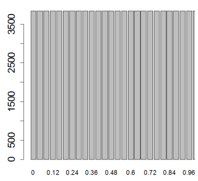


Fig. 6: N=25

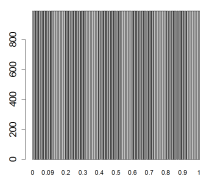


Fig. 7: N=100

次に、２つの投資戦略においては、資産価格（ファンダメンタル価格）は算術ランダムウォークをする、という仮定がなされているので、実際にモンテカルロ・シミュレーションを行い、２つの戦略にどのような差異があるのかを見る。すなわち、復元性が有限である場合、BL に従って均等投資すると、最適な投資戦略である OW に対し、どれだけ執行コストに差が出るのかを見る。ここで、資産価格の初期値を 10,000、ボラティリティを 100 とした。また、第 4 章における本研究独自のシミュレーションに合わせ、$X_0 = 1500$、$q = 5$、$\theta = 0.5$ とした。$\rho = 2.231$ は OW のものをそのまま用いた。この場合、２つの投資戦略の総執行コストは次の Fig. 8 のようになる。ここでは投資分割回数を 10、25、50、75、100 とし、10,000 万回のモンテカルロ・シミュレーションの平均をプロットしている。Fig. 8 から解かるように、分割回数が増えるほど、執行コストの差が縮小している。

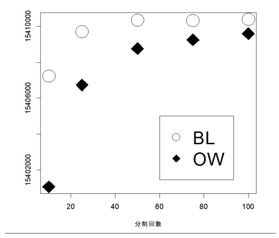


Fig. 8: BL と OW の執行コストの差

3 最適投資戦略における復元性

3.1 復元性とは

復元性 (resilience) とは元来は物理学や工学の分野で使用されてきた言葉であるが、近年は社会学や心理学、防災といった様々な場面によって使われるようになってきた。この節では金融市場における復元性とは何かについて、先行研究における定義及び解釈を紹介し、幾分曖昧な概念である復元性をモデルに落とし込むまでの手がかりを探る。Harris[7] によれば、復元性とは投資家による予期しない不均衡な注文の流入によって変動した価格がそれ以前の状態にいかに迅速に戻るか、と定義される。また、Kyle[8] によれば、復元性は市場流動性を規定する三要素、すなわち tightness、depth(厚み) と並ぶ 1 要素として位置づけられる。他の要素についても簡単に触れておくと、tightness とはビッド・アスク・スプレッドの幅を、depth とは注文板上にある単位価格当たりの注文量を表す。村永 [9] によれば、復元性は「現時点では注文として出されていない潜在的需給に関する情報を」表していると考えられ、需給バランスの変化によってそれが顕在化すると解釈することができる。より突き詰めて考えるならば、このことから復元性に関しては以下の２つの原理が考えられる。１つは、需給バランスが崩れ、拡大したビッド・アスク・スプレッドの間にランダムに流入する注文量が見かけ上増え、あたかもスプレッドが縮小していくかのように見えるというものである。もう 1 つは、需給バランスの崩れが投資家にとって何らかのシグナルとなり、それが平時と異なる注文の流入となって現れ、需給バランスを元の状態に戻そうとするかのように見えるというものである。いずれにしても復元性の源泉は明らかに投資家の行動原理に求められるべきものであり、OW で所与とされているものを一歩前へ進めて投資家行動としてモデル化することは可能であると考えられる。

3.2 最適投資戦略において復元性を考慮することの意義

大口投資家の最適投資戦略においては、一時的な需給バランスの崩れによって生じるマーケット・インパクトを考慮することが 1 つの鍵となることは前章で述べた。復元性とはその後、元の需給バランスへと戻ろうとする力と解釈することができる。その力が何によってもたらされるのか、という原理を考えることは、マーケット・インパクトが需給バランスの崩れによって生じる、という原理と対応するという意味で自然な流れ

である。BL においては復元性については全く触れられておらず、OW にあるように、暗黙のうちに復元性が無限大であるとする仮定が置かれていることになっている。　一方、OW では復元性は資産価格が一時的インパクトを受けてから恒久的インパクトの影響のみが残るまでの収束過程が、指数関数に従うと仮定されている。この仮定に関しては何ら理論的・実証的理由づけがなされておらず、従って OW の最適投資戦略を現実市場にそのまま適用するのは疑問が残る。OW から推察されるのは、復元性が非線形であるとする仮定から、復元性は平時とは異なる何か特別な力として位置づけられている、ということである。その「何か」をモデル化し、モデルの違いが最適投資戦略にどのように影響を及ぼすのかをシミュレーションするのが本研究の目的である。

3.3　復元性のモデルの提案

3.3.1　投資家の投資行動がもたらす復元性

いくつかの先行研究に見られるように、大口投資家の最適投資戦略を考える際、大口投資家以外の要素をできるだけ単純化することはモデルとしては単純明快になる一方で、重要な要素を欠落しかねず、その結果、現実市場との整合性が取れなくなる可能性をはらんでいることには注意を払わなくてはならない。本研究では、OW で外生的に与えられている復元性を投資家行動としてモデル化することにより、最適投資戦略の結果がどのように変化しうるかを見る。そこで、本節では以下のような３種類の投資家をモデル化し、復元性の内生化を試み、次節でそれらのモデルが妥当か否かを検証する。

3.3.2　Zero Intelligence モデル

復元性に対する最も単純なモデルは、復元性が単なるランダムな注文の流入によって生じると仮定し、ランダムに投資する投資家を市場に参加させることである。このタイプの投資家を Zero Intelligence モデルと呼ぶことにする。このモデルは Gode and Sunder[10] のアイディアを元にしている。Gode and Sunder は、かつて Smith[11] が大学の教室実験で示した、ワルラスのせり人が不在の状況でも取引価格が需給曲線の交点へと収束する、という需要と供給の法則が、人間の知性によって成立するのか、それとも市場制度によって成立し、知性は何ら関係がないのか、ということを人工市場シミュレーションによって検証しようと試みた。彼らは、ランダムに投資するトレーダーに予算制約を与えるだけで、人間を参加させた市場とほぼ遜色のない市場均衡が得られることを発見した。すなわち、異論は残るものの、需要と供給の法則は、市場制度によって成立し、人間の知性は関係しない可能性が高いことが示された。彼らはその時に用いた投資家を Zero Intelligence と呼んだ。その後、数多くの研究者は現実市場において観察される、様々なスタイライズド・ファクトと呼ばれる市場の特徴を、できるだけ単純な投資家の投資行動によって説明可能なのではないか、という方向性を模索し始めた。その中で、Maslov[12] はファット・テールやボラティリティの長期相関が単純な投資家モデルによって再現可能であることを示し、Withanawasam et al.[13] はそのアルゴリズムを僅かに修正し、実際の株価の値動きと比較することによって、更に現実に近い性質が得られることを示した。ここでは Withanawasam et al. の投資家モデルを、後述するモデルとの比較において最も単純という意味で Zero Intelligence(ZI) モデルと呼ぶことにする。以下は ZI モデルのアルゴリズムである。

1. 買い又は売り又は何もしない
2. 指値又は成行

i.、ii. をそれぞれ等確率で選ぶ。更に、ii. で指値の場合、

3. $\Delta = 1, 2, 3, 4$ を等確率で選ぶ
4. 注文価格 $= \begin{cases} \text{最良買い気配値} + \Delta & if \quad \text{売り} \\ \text{最良売り気配値} - \Delta & if \quad \text{買い} \end{cases}$
5. 注文数量は１～５の一様分布とする

3.3.3　Full Intelligence モデル

OW では、マーケット・インパクトのうち、恒久的インパクトはファンダメンタル価格に影響を与えるもの、として定義されている。ここから、仮にファンダメンタル価格を知る投資家が存在するならば、大口投資によって変化したファンダメンタル価格と、先物価格の乖離に着目した裁定取引を行うトレーダーが復元性の役割を担う、と考えることが可能となる。先物価格がファンダメンタル価格に収束するならば、確実に利益を得られるという意味で、このタイプの投資家を Full Intelligence(FI) モデルと呼ぶことにする。第２章で紹介したとおり、U-Mart では現物価格をファンダメンタル価格として外生的に与えることにより、Full Intelligence モデルの投資家を作成することができる。以下は FI モデルのアルゴリズムである。

現物価格 (P) と最良買い気配値 (Best Bid Price, 以下 BBP) 及び最良売り気配値 (Best Ask Price, 以下 BAP) を比較する

1. BBP<P<BAP の場合
   等確率で [BBP,P] に買い、又は [P,BAP] に売り指値
2. P<BBP<BAP の場合 [P,BAP] に売り指値
3. BBP<BAP<P の場合 [BBP,P] に買い指値
4. 1Ut 毎に板情報をチェックし、各条件が不成立なら注文をキャンセルする
5. 注文数量は１～５の一様分布とする

3.3.4　Low Intelligence モデル

木村・秋山[14] にあるように、スプレッドが３以上開いている場合、次の時刻においてはスプレッドが徐々に縮小するように注文が入りやすい。これを手がかりに復元性のモデル化を図る。すなわち、スプレッドが３以上開いている時は最良気配値に近い価格に注文を入れやすいように確率を荷重配分し、スプレッドが２以下の時は ZI モデルと同じアルゴリズムを取るとする。このタイプのトレーダーを ZI と FI の間、という意味で Low Intelligence(LI) モデルと呼ぶことにする。LI モ

デルはより現実に近いモデルである可能性がある。それは、現実にはFIモデルのようなファンダメンタル価格の変化を知って投資を行う投資家がいるかどうかは定かではない、仮にいるとしてもごく少数であろうし、一方でZIモデルでは後述するように、復元性のモデルとしては不十分である可能性があるからである。以下はLIモデルのアルゴリズムである。

1. スプレッドが3以上の場合
   1. 買い又は売りを等確率で選ぶ
   2. 最良気配値から近い順にスプレッド間で注文を入れる確率を荷重配分する
   例) スプレッド=4, 売りの場合
   BAP-1: 4/10, BAP-2: 3/10, BAP-3: 2/10, BAP-4: 1/10

2. スプレッドが2以下の場合
   1. 買い又は売り又は何もしない
   2. 指値又は成行
   1.、2. をそれぞれ等確率で選ぶ。更に 2. で指値の場合
   3.$\Delta = 1, 2, 3, 4$ を等確率で選ぶ
   4.注文価格 $= \begin{cases} \text{最良買い気配値} + \Delta & if \quad \text{売り} \\ \text{最良売り気配値} - \Delta & if \quad \text{買い} \end{cases}$
   5. 注文数量は1～5の一様分布とする

3.4 復元性をどのように定量化すべきか

3.4.1 復元性の動性

復元性は主に流動性に関連する指標を用いて定量化・評価している研究が多い。例えば、村永や木村・秋山では、2時点のスプレッドの比を取った縮小率をもって復元性の指標としている。Biais et al.[15] においても復元性という用語は使用していないものの、1時点前の注文で条件付けた注文の分布を Paris Bourse の過去の注文データから頻度をもって算出している。そして、スプレッドの内側に指値注文が流入した場合、更にその内側に指値注文が入りやすい、というダイアゴナル効果と呼ばれる現象を発見した。しかし、Degryse et al. [16] が指摘しているように、復元性は動的な概念であるので、スプレッド縮小率や1時点前の注文での条件付き分布のような2時点間の関係性を調べただけでは復元性を的確に表現しているとは言い難い。そこで、Degryse et al. は大口注文のあった前10ティックと後20ティックの指値板データを用いて、最良気配値や depth がどのように変化したかを分析することで復元性を動的に捉えている。彼らはそれをグラフ化し、視覚的に復元性を表現している。しかし、Degryse et al. の手法では最良買い気配値と最良売り気配値の推移が別個のものとして描かれており、指値板全体での動きがわかりにくい、という欠点がある。

3.4.2 Christalla による復元性の定量化

上述の Degryse et al. による復元性の定量化を克服する形で、Christalla[17] は、Gomber and Schweickert[18] によって開発された Exchange Liquidity Measures(XLM) を以下のように定式化し、復元性の定量化を試みた。

$$XLM_{B,t}(V) \quad = \quad \frac{P_{B,t}(V) - MQ_t}{MQ_t} \qquad (17)$$

$$XLM_{S,t}(V) \quad = \quad \frac{MQ_t - P_{S,t}(V)}{MQ_t} \qquad (18)$$

これは時点tにおいて、数量Vだけ投資した場合、売り、買いそれぞれにおいて中値からどれだけ価格が乖離し得るか、ということを定量化したものである。$P_{B,t}(V)$、$P_{S,t}(V)$ はそれぞれ平均購入額、平均売却額を表している。乖離が大きいほど価格変化が大きいことを意味し、従って流動性が低いと評価される。XLM は (4.1) 式と (4.2) 式の和として定義される。前項で、復元性の動性について言及したが、XLM は各時点において計測されるため、その時間変化を調べることで流動性がどれだけ変化しているかを測ることができる。また、Degryse et al. の定量化の課題であった、売り板と買い板の変動の違いを統一的に見ることもできる。

3.4.3 3モデルの復元性としての評価

この項では前章で提案した ZI、FI、LI の3モデルを XLM を用いて評価する。設定として、OW モデルにおいて分割回数が 10 の時、時点 1Ut において 381 の買い注文が入るが、それによって XLM が時点 1Ut から 120Ut においてどのように推移するかを調べる。それぞれのモデルのトレーダー数を1、5、10、20、と変化させ、乱数を変えて 10 回のモンテカルロ・シミュレーションの平均をプロットしたものが次の Fig. 9～11 のグラフである。

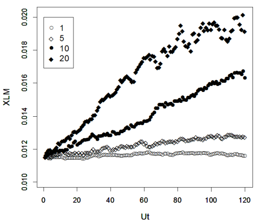


Fig. 9: ZI

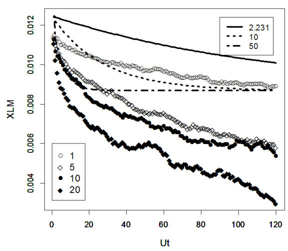


Fig. 10: FI

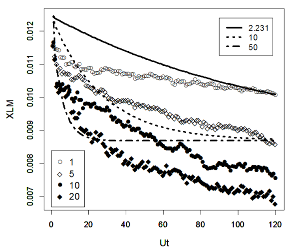


Fig. 11: LI

Fig. 9 を見ると、ZI は時間と共に XLM が増加していることがわかる。これは板の状態が元に戻るどころか乖離して行っていることを示しており、ZI は復元性を表現するモデルとしては不適切であることを示唆している。これはつまり、復元性とは単なるランダムな注文の流入ではない可能性がある、ということである。

それに対して、FI、LI モデルにおいては、時間とともに XLM が低下している傾向があり、加えてトレーダーの数が多いほどその低下速度が速いことが見て取れる。このことから、FI、LI の2モデルは復元性の機

能を果たしており、尚且つトレーダーの数が多いほど、復元性が強く働いていると言える。

更に、FI と LI のグラフには OW モデルにおいて外生的に与えられている、復元性が指数関数に従うとする仮定の下での XLM を重ねてプロットしている。その際、前章で与えた $\rho = 2.231$ 以外に、$\rho = 10, 50$ も併せてプロットしている。図から読み取れるように、$\rho = 2.231$ という仮定は復元性が非常に緩やかに働く状況を想定しているものと言える。XLM の推移という観点で見ると、FI モデルにおけるトレーダー数 1 及び LI モデルにおけるトレーダー数 5 の場合と変化率が似ていることがわかる。また、他の場合も見てみると、FI モデルにおいてはトレーダー数 10 の場合と $\rho = 50$ の場合が、また LI モデルにおいてはトレーダー数 20 の場合と $\rho = 50$ の場合が初期時点で近い XLM の値の推移を示している。このことは $\rho = 2.231$ として与えた場合の最適投資戦略である、投資期間の最初と最後に総投資量の約 4 分の 1 ずつを投資し、残りを均等に投資する戦略が最適でない可能性ある。このことは次章のシミュレーションを用いて確認していく。

4 U-Mart を用いた最適投資戦略の分析

この章では本研究の題目ともなっている、最適投資戦略における復元性の役割という観点から、人工市場を用いて復元性をモデルに組み込んだシミュレーションを行う。

4.1 シミュレーションの概要

まず、人工市場を構成するエージェントとしては、マーケット・インパクトを与える大口投資家として BL モデルと OW モデルのいずれかを 1 人参加させる。それに対し、復元性のモデルとして FI モデル、LI モデルのトレーダーのいずれかを 1 〜20 人参加させることで市場参加者を構成する。価格決定メカニズムは、U-Mart Ver.4.0 で初期設定となっている、東京証券取引所で採用されている指値板取引を使用する。初期設定では前場の前及び前場と後場の間、後場の後に板寄せ方式による注文処理が行われるが、ここでは注文が発生しないようにし、純粋にザラバ方式のみの価格決定メカニズムによる市場のダイナミズムを調べることにする。

大口投資家の最適投資戦略については第 3 章で見たとおり、BL の場合は分割回数に対して均等に投資する、OW の場合は最初と最後に 4 分の 1 ずつ投資し、残りを分割回数に応じて均等に投資するものとする。

総投資量は 1500、板の厚みは 5、恒久的インパクトは投資量× 0.5、すなわち投資量の半分だけファンダメンタル価格を押し上げるものとする。

シミュレーションの回数は、投資分割回数 (10,25,50,75,100)、大口投資家 (BL,OW)、復元性モデルのトレーダーの数 (FI,LI、各 1,5,10,20 人) を 1 セットとして、1 セットにつき乱数シードを変えて FI では 10 回、LI では 50 回ずつのシミュレーションを行うものとする。

シミュレーションの結果として、2 つの最適投資戦略の目的関数である、総執行コストの差異を調べ、復元性との関係性を調べる。

4.2 シミュレーションの結果

まず、FI モデルを用いた結果を分割回数毎にまとめたものが、Fig. 12〜16 である。 まず全ての分割回数に

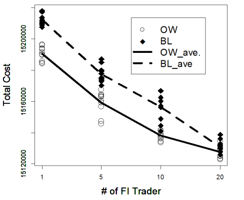


Fig. 12: N=10

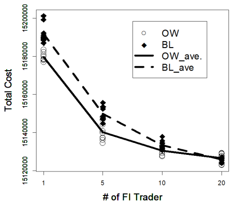


Fig. 13: N=25

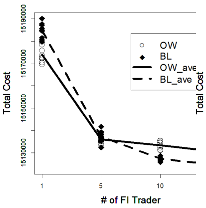


Fig. 14: N=50

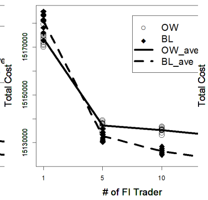


Fig. 15: N=75

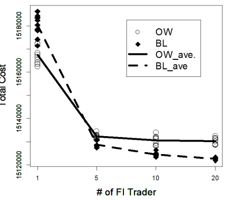


Fig. 16: N=100

ついて言えるのは、FI トレーダーの数が増えるほど、両最適投資戦略における総執行コストが減少する傾向が見られるということである。また、いずれの分割回数においても、FI トレーダーの数が少ない場合において、OW モデルの方が BL モデルに比べ、総執行コストが低くなる傾向が覗える。その一方で、分割回数が増え、尚且つ FI トレーダーの数が増えるに従って、OW モデルの方が総執行コストが大きくなる傾向もみられる。次に、総執行コストの絶対額に着目する。FI トレーダーの数が同じ場合における分割回数間の比較をすると、FI トレーダーの数が少ない場合には、分割回数が増加するほど総執行コストが抑えられていることがわかる。その一方で、FI トレーダーの数が多い場合は、いずれの最適投資戦略においても分割回数の違いによる総執行コストにそれほど大きな差は見られない。
次に、LI モデルを用いた結果を同様に分割回数毎にまとめたものが、Fig. 17〜21 である。 こちらは、FI モ

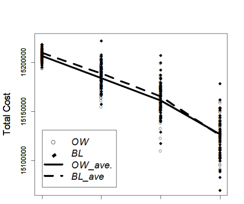


Fig. 17: N=10

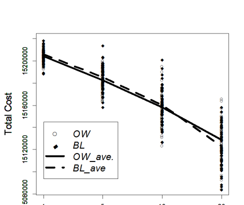
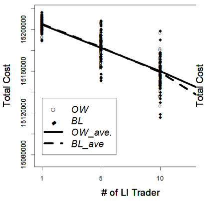
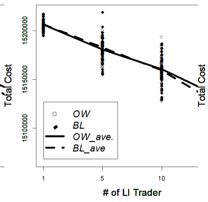


Fig. 18: N=25

デルの場合と比べるとそれほど差は大きくない。というのも、4.3.4 で設定したように、LI トレーダーはスプレッドが小さい時にはランダムに投資をするので、市場のボラティリティが上昇し、結果として総執行コストの分散も大きくなるからである。このことは LI トレーダーの数が多いほど総執行コストにばらつきが見られることからも裏付けられる。傾向として明らかなのは、FI モデルの場合と同様に、LI トレーダーの数が





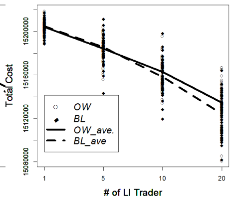


Fig. 19: N=50　Fig. 20: N=75　Fig. 21: N=100

増加すると、いずれの投資戦略も総執行コストが減少するという点である。また、分割回数が少なく、尚且つ LI トレーダーの数が少ない場合には、OW モデルの方が執行コストが小さくなる傾向があることも見て取れる。逆に、分割回数が多く、LI トレーダーの数も多い場合、FI モデルの場合と同様に、OW モデルの方が総執行コストが大きくなる傾向も見られる。しかしこれらの差異は微小なもので、50 回のシミュレーションでは明らかとは言えない。

4.3　考察

前節で得られたシミュレーションの結果について、最適投資戦略と復元性の関係性という観点から考察する。

まず、FI モデルについて考察する。いずれの分割回数においても FI トレーダーの数が少ない場合において、OW モデルの方が BL モデルに比べ、総執行コストが低くなる傾向が覗えた。これは、投資期間の最初と最後に約４分の１ずつ投資する、という復元性がそれほど強くない想定の下での最適投資戦略が、シミュレーションの結果と整合的である可能性を示唆している。つまり、ファンダメンタル価格を知る投資家が存在する市場においては OW モデルの投資戦略を執ることの妥当性を裏付けるものである。その一方で、そうした投資家による復元性の評価を見誤ると最適でなくなる可能性もある。それは分割回数を増やすほどに BL モデルとの比較において顕著となる。分割回数を増やすにつれて BL モデルでは１回当たりの投資量が小さくなり、ファンダメンタル価格への影響も小さくなる。一方、OW モデルにおいては、最初の１回の投資量は４分の１で変わらず、その相対的な影響の大きさがその後の全ての投資にわたって影響し続けるため、結果的に総執行コストの上昇につながっていることが考えられる。この悪影響について、本シミュレーションでは分割回数 50 及び FI トレーダー数５の近辺が境目になっていることが確認できる。

次に、LI モデルについて考察する。前節で言及したとおり、LI モデルを用いたシミュレーションの結果は、FI モデルほど明らかではない。その中で言えるのは、LI トレーダーの数が増えるにつれて、総執行コストが減少する傾向があることから、LI モデルも復元性の役割を果たしている可能性があるという点である。しかし、FI モデルに見られるような最適投資戦略間での明らかな総執行コストの差異は見出せない。この違いから、最適投資戦略における復元性には、FI モデルのような、LI モデル以上の知性が想定されていることが示唆される。

5　結論

5.1　結論

本研究では、BL モデルと OW モデルという、目的が同じにも拘わらず、市場に関する仮定が異なるために導出される戦略が異なる最適投資戦略問題を取り上げた。市場に関する仮定はより現実的な方が望ましいが、観察不可能な要素に関しては何らかの形で外生的に与えるしかない。しかし、そうした仮定に理論的･実証的な裏付けがないならば、導出される戦略にも疑問符が付く。その１つが本研究で取り上げた、復元性という概念である。

金融市場における資産価格の変動が投資家行動によってもたらされると考えるならば、復元性も何らかの投資家行動によって生じるはずである。その目論見の下で、そうした機能を果たし得る投資家をモデル化し、シミュレーションによって改めて２つの最適投資戦略を比較することを試みた。そこで大きな役割を果たしたのが人工市場シミュレーションというシミュレーション環境である。金融市場のような複雑に要因が絡み合う一方で、その一つ一つを紐解けば、投資家の投資行動に帰着する、というミクロ・マクロループを再現するためのツールとして、人工市場は非常に有用である。

本研究ではまず、復元性をモデル化した投資家を人工市場上でシミュレーションし、XLM という指標を用いてその復元性としての妥当性を検証した。そこで、Full Intelligence と Low Intelligence という２つのモデルが復元性の原理となり得ることを確認し、更にトレーダーの数が復元性の強さを表現していることも発見した。最後に、２つの最適投資戦略を２種類の復元性モデルの下でシミュレーションし、最適投資戦略と復元性の関係性について考察した。

考察として得られたのは、まず、OW において数値例として与えられていた復元性は本研究のモデルに比べてより弱いもの想定しており、その想定が正しい限りにおいて、OW モデルの最適投資戦略が妥当性を持つということである。また逆に、市場における復元性を正しく評価しなかった場合、例えば本研究で見たように過小評価していた場合、分割回数を増やすほどに BL モデルと比べて総執行コストが大きくなる危険性も孕んでいる。更に、２つの復元性モデルは XLM という評価で見た場合には同質のものと考えることができるが、最適投資戦略という文脈においては、２つのモデルには差異が見られた。このことから、最適背投資戦略において想定されている復元性には、Low Intelligence モデル以上の投資家の知性が想定されている可能性があることがわかった。

5.2　今後の課題

本研究では先行研究においてはそれほど議論されてこなかった、復元性という概念に着目し、その原理を投資家行動に求めた。そこで、復元性は投資家行動としてモデル化することが可能であることがわかった。今後の課題としては、３つの方向性が考えられる。１つ目は、OW で仮定されていた、指数関数に従うような復元性のモデルを構築することである。この場合、XLM という指標を用いることで、関数形をフィットさせるようなモデルを探る必要性が出てくるであろう。２つ目は、Full Intelligence と Low Intelligence の差に着目

し、その中間となるような復元性のモデルを提案することである。この場合、Low Intelligence モデルに更に何らかの戦略を追加することが必要となってくるであろう。３つ目は、Full Intelligence と Low Intelligence を同時にシミュレーションに組み込み、復元性がどのように表現されるかを調べることである。この試みは様々な投資家が存在する現実市場に照らしてみると現実的なモデルであると考えられるが、混合割合をどのようにするか、などについては理由づけが必要になるため、「ヤッコー」にならないように注意する必要がある。

参考文献

1) Markowitz, H, Portfolio selection, The journal of finance, **7**-1, 77/91 (1952)
2) Perold, A, The implementation shortfall: paper versus reality, Journal of portfolio management **14**, 4/9 (1988)
3) Chen, J., H. Hong., M. Huang. and J. D. Kubik, Does fund size erode mutual fund performance? The role of liquidity and organization, The American Economic Review, **94**-5, 1276/1302 (2004)
4) Yan, X. S, Liquidity, investment style, and the relation between fund size and fund performance, Journal of Financial and Quantitative Analysis, **43**-03, 741/767 (2008)
5) Bertsimas, D., and A. W. Lo, Optimal control of execution costs, Journal of Financial Markets, **1**-1, 1/50 (1998)
6) Obizhaeva, A. A., and J. Wang, Optimal trading strategy and supply/demand dynamics, Journal of Financial Markets, **16**-1, 1/32 (2013)
7) Harris, L, Liquidity, trading rules and electronic trading systems, NYU Salomon Center Series in Finance and Economics, **91**-8 (1990)
8) Kyle, A. S, Continuous auctions and insider trading, Econometrica, **53**-6, 1315/1335 (1985)
9) 村永淳, 本邦株式市場の流動性に関する動学的考察－東京証券取引所のティック・データ分析－, IMES Discussion Paper, 2000-J-18 (2000)
10) Gode, D. K., and S. Sunder, Allocative efficiency of markets with zero-intelligence traders: Market as a partial substitute for individual rationality, Journal of political economy, **101**-1, 119/137 (1993)
11) Smith, V. L, An experimental study of competitive market behavior, The Journal of Political Economy, **70**-2, 111/137 (1962)
12) Maslov, S, Simple model of a limit order-driven market, Physica A, **278**-3, 571/578 (2000)
13) Withanawasam, R. M., P. A. Whigham, T. Crack, and I. M., Premachandra, An empirical investigation of the Maslov limit order market model, Discussion Paper, Department of Information Science, University of Otago, (2010)
14) 木村博道,・秋山英三, 市場流動性を説明できるローインテリジェンスモデル, 日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌, **52**, 56/81 (2009)
15) Biais, B., P. Hillion, and C. Spatt, An empirical analysis of the limit order book and the order flow in the Paris Bourse, the Journal of Finance, **50**-5, 1655/1689 (1995)
16) Degryse, H., F. De Jong, M. Van Ravenswaaij, and G. Wuyts, Aggressive orders and the resiliency of a limit order market, Review of Finance, **9**-2, 201/242 (2005)
17) Chlistalla, M, FROM MINUTES TO SECONDS AND BEYOND: MEASURING ORDER-BOOK RESILIENCY IN FRAGMENTED ELECTRONIC SECURITIES MARKETS, ECIS 2011 Proceedings Paper 94, (2011)
18) Gomber, P. and U. Schweickert, The Market Impact - Liquidity Measure in Electronic Securities Trading, Working Paper, (2002)